/ /

الاثنين 28 / 5 / 2018 (1)

تمارين حول الفصل الأول:

النظرية العامة للمعادلات التفاضلية
الخطية من الرتبة n .

السؤال الأول: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

الحل: اعتماداً على طرق التقنيل:

نأخذ احتمالية e^{mx} حل إذا كانت:
$$(2x+1)m^2 + (4x-2)m - 8 = 0$$

$$2xm^2 + m^2 + 4xm - 2m - 8 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 + 2mx(m+2) = 0$$

$$(m+2)(m-4) + 2xm(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m + 2mx + 4) = 0$$

إما $m+2 = 0 \rightarrow m = -2 \rightarrow e^{-2x}$ حل

أو $m + 2mx + 4 = 0 \rightarrow m(1+2x) = 4 \rightarrow m = \frac{4}{1+2x}$

مرفوض كونه يتعلق بـ x.

بناءً عليه فإن الحل العام يعطى من طريق لوضل أوستر غرادسكي بالشكل:

$$y_h = y_1 \left[c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + c_2 \right]$$

بعد كتابة المعادلة بالشكل النموذجي

$$y'' + \frac{4x-2}{2x+1} y' - \frac{8}{2x+1} y = 0$$

$$e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\int \frac{4x-2}{2x+1}\,dx} = e^{-\int \left(2 - \frac{4}{2x+1}\right) dx}$$

$$= e^{-2x + 2\ln(2x+1)} = e^{-2x}(2x+1)^2$$

/ /

نعوض في x :

$$y_h = e^{-2x}\left[c_1 \int \frac{e^{-2x}(2x+1)^2}{e^{-4x}} dx + c_2 \right]$$

$$y_h = e^{-2x}\left(c_1 \int e^{2x}(2x+1)^2 \, dx + c_2 \right)$$

بإيجاد قيمة التكامل السابق

بالتجزئة

$$\int (4x^2 e^{2x} + 4x e^{2x} + e^{2x}) dx$$

فيكون الحل العام المطلوب.

** ** ** **

السؤال الثاني :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(x\sin x + \cos x)\, y'' - x\cos x\, y' + \cos x\, y = x\,(x\sin x + \cos x)^2$$

الحل :

$$y = y_h + y_p$$

y_h : حل عام المتجانسة

y_p حل خاص

- اعتماداً على طرق التفتيش :

تكون الدالة $y_1 = x$ حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا وفقط

إذا كان $P_1(x) + x P_0(x) = 0$

حل $y_1 = x$ ⟸ $-x\cos x + x\cos x = 0 = 0$

- تكون الدالة $y_2 = \cos x$ حلاً للمعادلة التفاضلية إذا كان يحقق المطابقة

$y = \cos x \qquad y' = -\sin x \qquad y'' = -\cos x$

$\Rightarrow \quad y_2 = \cos x$ حل

بالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 = A_1 x + A_2 \cos x.$$

لذا كان بالإمكان ايجاد الحل الخاص الأول والمتابعة وفق ليوفيل أوستروغرادسكي بالشكل :

$$y_h = y_1 \left[c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1'} \, dx + c_2 \right]$$

$$-\int p(x)\,dx = \int \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} \, dx = \ln | x \sin x + \cos x |$$

نلاحظ هنا أن البسط مشتق المقام

$$y_h = x \left(c_1 \int \frac{x \cdot \sin x + \cos x}{x^2} \, dx + c_2 \right)$$

لنوجد قيمة التكامل :

$$\int \left(\frac{x \sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x^2} \right) dx \qquad u = \cos x \Rightarrow \sin x = u'$$

$$\int u v' = uv - \int u' v \qquad v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}$$

$$y_h = x \left(c_1 \cdot \frac{\cos x}{x} + c_2 \right)$$

لإيجاد y_p :

$$W(\cos x, x) = \begin{vmatrix} \cos x & x \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix} = \cos x + x \sin x$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ x(x \sin x + \cos x) & 1 \end{vmatrix} = -x^2 (x \sin x + \cos x)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & x(x \sin x + \cos x) \end{vmatrix} = x \cdot \cos x \, (x \sin x + \cos x).$$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w}\, dx + y_2 \int \frac{w_2}{w}\, dx$$

$$y_p = \cos x \int -x^2\, dx + x \int x \cdot \cos x$$

هذا التكامل يكامل بالتجزئة.

$$y_p = -\cos x \, \frac{x^3}{3} + x \int x \cos x \longrightarrow \quad ...$$

** ** ** **

السؤال الثالث:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x^4 - x^3) y'' + (2x^3 - 2x^2 - x) y' - y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

إذا علمت أن $y_1 = \frac{1}{x}$ هو حل للمعادلة المتجانسة المناظرة.

الحل:

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = \frac{1}{x} \left[c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2}\, dx + c_2 \right]$$

ملاحظة: يجب مساواة أمثال أعلى مشتقة أي y'' بالواحد قبل اختيار $p(x)$

$$e^{-\int p(x) dx} = e^{-\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2(x-1)}\, dx}$$

لنوجد قيمة التكامل:

لدينا أولاً:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

نطابق فنجد أن:

$B = 1 \qquad A = 3 \qquad C = -1$

فيكون:

Alamal

$$e^{-\int \frac{3x-1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx} = e^{-3\ln x + \frac{1}{x} + \ln|x-1|}$$

$$= e^{\ln \frac{x-1}{x^3} + \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$y_h = \frac{1}{x}\left[c_1 \int \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) dx + c_2 \right]$$

لنوجد قيمة هذا التكامل:

$$\int \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) dx = \int e^{\frac{1}{x}} dx - \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} dx$$

نأخذ $t = \frac{1}{x}$ ونكامل ـــــ الجواب $\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

فيكون الحل العام لها: $A_1 e^{\frac{1}{x}} + A_2 \frac{1}{x}$

xx xx xx

السؤال الرابع:

- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $(x+1)^2 y''' - 12 y' = 0$

إذا علمت أنّ المعادلة معطاة حلين خاصين:

$y_1 = 1$ and $y_2 = \frac{1}{(1+x^2)}$

- ملاحظة على هذا لو ما عطاني هيدل الحلين:

فالمعادلة السابقة تتحول إلى معادلة لجاندر بعد ضربها ب $(x+1)$

الحل: $y = y_1 \int u\, dx \Rightarrow y = \int u\, dx$

$y' = u \quad y'' = u' \quad y''' = u''$

نعوض في المعادلة السابقة فنجد أنّ:

/ /

$$(x+1)^2 u'' - 12u = 0 \qquad (*)$$

لحل المعادلة هو:

$$u_2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$u = u_2 \int v\,dx \qquad u = \frac{-2}{(x+1)^3}\int v\,dx$$

$$u' = \frac{6}{(x+1)^4}\int v\,dx - \frac{2v}{(x+1)^3} \qquad u'' = \frac{-24}{(x+1)^5}\int v\,dx + \frac{6v}{(x+1)^4} + $$

نعوض في المعادلة (*) $\qquad -\frac{2}{(x+1)^3}v' + \frac{6}{(x+1)^4}v$

$$-\frac{2}{(x+1)}v' + \frac{12}{(x+1)^2}v - \frac{24}{(x+1)^3}\int v\,dx + \frac{24}{(x+1)^3}\int v\,dx = 0$$

$$\frac{-2}{(x+1)}v' + \frac{12}{(x+1)^2}v = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{6}{x+1} \Rightarrow v = (x+1)^6$$

$$u_3 = u_2 \int v\,dx \qquad u_3 = \frac{-2}{(x+1)^3}\int (x+1)^6\,dx$$

$$u_3 = \frac{-2}{(x+1)^3}\,\frac{(x+1)^7}{7} = -\frac{2}{7}(x+1)^4$$

$$y_3 = y_1 \int u_3\,dx \Rightarrow y_3 = -\frac{2}{7}\int (x+1)^4\,dx = \frac{-2}{35}(x+1)^5$$

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3$$

$$= A_1 + A_2 \frac{1}{(x+1)^2} + A_3 (x+1)^5$$

xx xx xx xx

السؤال الخامس:

5- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x+3)y'' - (2x+7)y' + 2y = (x+3)^2 e^{x}$$

تكون الدالة $y = e^{mx}$ حلاً إذا كان:

$$(x+3)m^2 - (2x+7)m + 2 = 0$$

$$(xm)(m-2) + 3(m-\tfrac{1}{3})(m-2) = 0$$

$$(m-2)\left(xm + 3(m-\tfrac{1}{3})\right) = 0$$

$$m-2=0 \rightarrow m=2 \longrightarrow e^{2x}$$ حل

$$xm + 3m - 1 = 0$$ مرفوض كونه يتعلق بـ x.

يكون الحل العام لـ y_h هو:

$$y_h = e^{2x}\left(c_1 \int \frac{e^{-\int \frac{2x+7}{x+3}dx}}{e^{4x}}\, dx + c_2\right)$$

$$\int \frac{2x+7}{x+3}\, dx = 2x + \ln(x+3)$$

$$y_h = e^{2x}\left(c_1 \int \frac{e^{2x}(x+3)}{e^{4x}}\, dx + c_2\right).$$

$$y_h = e^{2x}\left(c_1 \int e^{-2x}(x+3)\, dx + c_2\right)$$

نكامل بالتجزئة:

$$y_h = e^{2x}\left(c_1\left(-(x+3)\tfrac{1}{2}e^{-2x} + \tfrac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx\right) + c_2\right)$$

$$y_h = e^{2x}\left(-c_1(x+3)e^{-2x} + \tfrac{1}{4}e^{-2x} + c_2\right)$$

$$y_h = -c_1\cdot(x+3) - \tfrac{1}{4} + c_2 e^{2x} = c_0(2x+7) + c_2 e^{2x}$$

$$y_h = c_0(2x+7) + c_2 e^{2x}$$ هو الحل العام

$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = 2x+7$$ نوجد الحل الخاص:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & 2x+7 \\ 2e^{2x} & 2 \end{vmatrix} = 2e^{2x} - 2e^{2x}(2x+7)$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2x+7 \\ (x+3)e^{x} & 2 \end{vmatrix} = -(x+3)(2x+7)e^{x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+3)e^{x} \end{vmatrix} = (x+3)\, e^{3x}$$

$$y = y_1 \int \frac{W_1}{W}\, dx + y_2 \int \frac{W_2}{W}\, dx$$

$$y = e^{2x} \int \frac{-(x+3)(2x+7)e^{x}}{2e^{2x}(6-2x)}\, dx + (2x+7) \int \frac{(x+3)e^{3x}}{2e^{2x}(6-2x)}\, dx$$

باكيا دمج هذه التكاملات ينتج y_p .

** ** **